Лекция 6. Фурье түрлендіруінің қасиеттері

1) Сызықтық:

$$F(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F f_1 + \beta F f_2$$

2) Ұқсастық:

$$F(f(\alpha t)) = \frac{1}{\alpha} F f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

3) Үздіксіздік:

Егер $\{f_n\} \to \{f_0\}$ в $L_1(R)$, онда бір калыпты $\{\hat{f}_n\} \to \{\hat{f}_0\}$.

4) Туында абсолютті интегралданатын функция болса, оның Фурье түрлендіруі келесі формула аркылы алынады:

$$F\left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = (i\xi)^n F f(\xi)$$

- бөліктеп интегралдау аркылы дәлелдеуге болады

5) Алғашкы функциянын Фурье түрлендіруі

$F\left(\int F(t)dt\right)=\frac{1}{i\xi}Ff(\xi)$ - Алғашкы функциянын болу керек

және абсолютті интегралданатын болу керек.

6) Ығысу туралы теорема.

$[Ff(t-\tau)](\xi)=e^{-i\xi\tau}Ff(\xi)$

7) Фурье түрлендіруді дифференциалдау.

$\frac{d}{d\xi}[Ff]=[F(-ixf(x))](\xi)$, формула орындалу үшін

$|xf(x)|\in L_1(R)$, бұл келесі асимптотикаға эквивалентті:

$|f(x)|\sim O\left(\frac{1}{x}\right)\cdot O\left(\frac{1}{x}\right)$, осыдан $|f(x)|\sim O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, егер $x\to\infty$.

8) Модуляция туралы теорема

$\left[Ff(t)e^{i\omega_0 t}\right](\xi)=Ff(\xi-\omega_0)$

9) Орам туралы теорема.

Орамның белгілеуі: $F(f**g) = Ff \cdot Fg$.

10) Парсеваль теңдігі

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Ff(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \text{, если } f \in L_1(R) \bigcap L_2(R).$$

11) Шексіздіктегі өшуі:.

Егер f және $|x| \to \infty$ үшін оның *(n-1)* туындылары $\to 0$, онда $|\xi|^n \cdot Ff(\xi) \to 0, |\xi| \to \infty$. Осыдан, егер $f(x) \in L_2(R)$, онда $\hat{f}(\xi)$ - үздіксіз және шектелген функция.

12) Планшерель теоремасы.

$\forall f \in L_2(R)$ келесі тізбекті анықтайық $g_N = \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\lambda x} dx$, онда

$g_N \in L_2(R)$, және :

$\exists \underrightarrow{\lim} g_N(\lambda) = g(\lambda)$ $L_2(R)$ метрикасында, егер $N \to \infty$.